

electrode

Nikita Lukinov 

Содержание

1	Дайте определение точечного электрического заряда.	11
2	Фундаментальные свойства электрического заряда. Закон сохранения заряда.	11
3	Сформулируйте Закон Кулона.	11
4	Дайте определение напряженности электрического поля.	12
5	Сформулируйте принцип суперпозиции электрических полей.	12
6	Что показывают силовые линии электрического поля.	12
7	Дайте определение потока напряженности электрического поля.	12
8	Сформулируйте электростатическую теорему Гаусса.	13
9	Напряженности электростатических полей равномерно заряженных сферы и бесконечной плоскости.	13
9.1	Сфера	13
9.2	Плоскость	13
10	Запишите граничные условия для нормальной и тангенциальной составляющих напряженности электрического поля.	14
11	Как связана с зарядами дивергенция вектора напряженности электрического поля.	15
12	Запишите формулы для напряженности электрического поля дискретного и непрерывного распределений заряда.	15
13	Как определяется потенциал электрического поля.	15
14	Запишите формулы для потенциала электрического поля дискретного и непрерывного распределений заряда.	16

15	Запишите формулу, показывающую локальную связь между потенциалом и напряженностью электрического поля.	16
16	Приведите примеры эквипотенциальных поверхностей.	16
17	Что такое электрический диполь. Чему равны потенциал и напряженность поля электрического диполя.	17
18	Дайте определение электрического дипольного момента нейтральной системы зарядов.	17
19	Чему равна циркуляция вектора напряженности электростатического поля. Приведите доказательство для системы точечных зарядов.	18
20	Чему равен ротор вектора напряженности электростатического поля. Приведите доказательство для системы точечных зарядов.	18
21	Запишите уравнения Пуассона и Лапласа для потенциала электростатического поля.	18
22	Свободные и связанные заряды в веществе.	19
23	Чему равны напряженность и потенциал электрического поля, а также плотность свободных зарядов внутри однородного проводника. Приведите доказательства утверждений.	19
24	Какова связь напряженности электрического поля у поверхности однородного проводника с поверхностной плотностью свободных зарядов.	20
25	Плоский конденсатор и его емкость.	20
26	Как рассчитать емкость батареи конденсаторов.	20
26.1	Параллельное соединение	20
26.2	Последовательное соединение	21
27	Дайте определение вектора электрической поляризации.	21

28	Что такое электрическая индукция поля.	21
29	Сформулируйте теорему Гаусса для электрической индукции в интегральной и дифференциальной формах.	22
30	Запишите граничные условия для вектора индукции электрического поля. Откуда они следуют?	22
31	Материальные уравнения для электрического поля, диэлектрические восприимчивость и проницаемость.	22
32	Взаимная энергия системы точечных зарядов, собственная энергия заряда.	23
33	Энергия системы непрерывно распределенных зарядов (формула).	23
34	Запишите формулы для энергии электростатического поля и ее объемной плотности.	23
35	Чему равны сила и момент сил, действующие на точечный диполь в электрическом поле.	24
36	Дайте определения силы электрического тока и плотности тока. Какова связь между ними.	24
37	Запишите уравнение непрерывности в интегральной и дифференциальной формах.	24
38	Закон Ома для участка цепи и его дифференциальная форма.	25
39	Сопротивление и удельное сопротивление проводника. Проводимость и удельная проводимость проводника.	25
40	Как рассчитать сопротивление батареи проводников? Убедите экзаменатора в умении это делать.	25
41	Закон Джоуля-Ленца и его дифференциальная форма.	25

42 Сформулируйте правила Кирхгофа. Убедите экзаменатора в умении их применять.	26
43 Закон сохранения энергии для цепей постоянного тока, содержащих э.д.с.	26
44 Что такое линейный и объемный элементы тока.	27
45 Запишите закон взаимодействия элементов тока – закон Ампера.	27
46 Что такое вектор магнитной индукции поля. Запишите закон Био-Савара-Лапласа.	27
47 Не противоречит ли закон Ампера третьему закону Ньютона.	28
48 Чему равны индукция магнитного поля прямого бесконечного провода с током.	28
49 Линии магнитной индукции и их свойства.	29
50 Сформулируйте теорему о циркуляции магнитной индукции в интегральной и дифференциальной формах.	29
51 Сформулируйте теорему Гаусса для магнитного поля в интегральной и дифференциальной формах	30
52 Что такое векторный потенциал. Как он связан с магнитной индукцией. Свойства векторного потенциала.	30
53 Чему равна индукция магнитного поля плоского витка с током.	31
54 Чему равны сила и момент сил, действующие на элементарный ток в магнитном поле.	31
55 Сила Лоренца и характер движения заряда в постоянных электрическом и магнитном полях.	31
56 Сформулируйте закон электромагнитной индукции Фарадея и правило	

Ленца.	32
57 В чем заключается явление самоиндукции.	32
58 Что характеризует коэффициент самоиндукции (индуктивность).	33
59 Чему равны собственная энергия проводника с током и энергия системы замкнутых токов.	33
60 Запишите формулы для энергии магнитного поля и ее объемной плотности.	34
61 Молекулярные токи и вектор намагниченности.	34
62 Дайте определение вектора напряженности магнитного поля.	34
63 Сформулируйте теорему о циркуляции вектора напряженности магнитного поля (в интегральной и дифференциальной формах).	35
64 Запишите материальные уравнения для магнитного поля. Что характеризуют магнитные восприимчивость и проницаемость вещества.	35
65 Граничные условия для векторов напряженности и индукции магнитного поля.	35
66 Что такое ток смещения.	35
67 Запишите уравнения Максвелла в дифференциальной форме.	36
68 Запишите уравнения Максвелла в интегральной форме.	36
69 Сколько решений имеет система уравнений Максвелла. Ответ обоснуйте.	36
70 Дайте определение и запишите выражение для вектора Умова-Пойнтинга.	37
71 Получите волновое уравнение из системы уравнений Максвелла.	37
72 Что такое плоская волна.	38

73 Нарисуйте взаимную ориентацию полевых векторов и волнового вектора в плоской волне. Поляризации электромагнитной волны.	39
74 Чему равны плотность потока энергии и плотность потока импульса электромагнитной волны.	41
75 Приведите примеры интерференции электромагнитных волн.	41
76 Излучение электромагнитных волн диполем. Зависимость излучаемой мощности от частоты.	41
77 Дайте определение квазистационарных электромагнитных процессов.	44
78 Приведите примеры расчета тока в электрических цепях при переходных процессах (RC- и RL-цепи).	44
79 Собственные колебания в колебательном контуре.	45
80 Вынужденные колебания в колебательном контуре под действием гармонической силы. Формулы для амплитуды и фазы.	46
81 Опишите и обоснуйте метод комплексных амплитуд (описание, обоснование, пример).	46
82 В чем заключается скин-эффект. Чему равна толщина скин-слоя в простейших случаях. Зависимость толщины скин-слоя от частоты.	47

Преамбула.

Перед вами – ответы на контрольные вопросы по электродинамике, которые висели на сайте Макарова и которые были присланы начальником курса. Сразу скажу, что это – версия 2018 года, есть и более поздние версии, и в них есть много вопросов, что называется, на убийство. Здесь же откровенно гробовыми или зубрильными я назвал бы только вопросы, связанные с волнами – уж очень неинтуитивная это штука.

Как и в случае с осями, здесь приведена не какая-то исчерпывающая/строгая теория,

а идейные и самые главные вещи, которые скорее должны походить на устный ответ билета. Этот документ по очевидным причинам дался намного сложнее осей, и вопросы в самом списке намного менее равномерные и последовательные, чем были в осях. Посему, во-первых, он, скорее всего, будет еще не раз исправлен, во-вторых, к некоторым вопросам ответ будет составлять две строки, а к некоторым – две страницы. В любом случае, к каждой выписанной формуле я старался давать какие-то хоть минимальные пояснения. В то же время, у меня, как и у Макарова, достаточно много математических шагов пропущено: во-первых, потому что за ту неделю, что я потратил на этот документ, все многостраничные выводы изложить в латехе – большая и трудная задача, во-вторых – опять же, потому что упор шел на физический смысл, а на зачете вряд ли кому-то будут интересны огромные выводы каких-то законов.

Теория бралась из книжки Матвеева, немного из уже готовых теорем, немного – из лекций Кокшарова Ю.А. с физфака. Книжка Матвеева – действительно хороший и относительно понятный учебник, так что в случае чего советую не лениться и обращаться к нему.

P.S. Я прошу прощения за миниатюрные формулы – это моя вторая крупная работа в латехе, и о существовании `display mode` я узнал где-то на 75-м вопросе. Регуляркой или чем-то таким это, увы, не правится.

ENJOY!

Бонус: небольшой ликбез по векторному анализу.

WARNING! Если вы не как автор и ходили в третьем семестре на матан, смело пропускайте эту главу, потому что в ней очень грубым и неакадемичным образом описаны идеи понятий, пронизывающих весь курс. Без понимания этих вещей изучение курса превратится в тупое заучивание формул, но нам важно именно что увязать физические явления с математической моделью. Автор надеется, что эта секция поможет идейно понять смысл тех же уравнений Максвелла.

Градиент. Самое простое понятие из этого трехголового змея векторных операций. По сути, выражает вектор из частных производных от скалярной функции. Хорош тем, что его скалярное произведение с бесконечно малым приращением вектора аргументов ($d\mathbf{r}$) –

это первый дифференциал функции и, как нетрудно догадаться, он максимален, если $d\mathbf{r}$ совпадает с градиентом и равен нулю, если $d\mathbf{r}$ перпендикулярен градиенту. В нашем курсе это значит, что, например, любая эквипотенциальная поверхность должна быть перпендикулярна вектору напряженности. Если же $d\mathbf{r}$ совпадает с отрицательным градиентом, то приращение будет наибольшим по модулю и наименьшим по значению (ММП поймет).

Поток. Допустим, у нас есть поверхность, на которой задано векторное поле. Мы хотим посчитать силу эмиссии этого векторного поля из этой поверхности – при том, что у поверхности в рамках задачи выбираются внутренняя и внешняя стороны, и соответственно им определяется втекание и вытекание (условно!) поля. Эффективным здесь себя показывает такой подход: мы дробим поверхность на маленькие кусочки, сравнимые по размеру с точкой, и из каждого такого кусочка мы проводим нормаль к внешней стороне этой поверхности. Далее, мы для ~~каждой такой нормали~~ берем скалярное произведение ~~этой нормали~~ и вектора нашего поля в этой точке. ~~По сути, это задает проекцию вектора на нормаль~~ и, больше того, в случае вытекания угол между вектором и нормалью будет острый и этот вклад в поток будет положительным, а в случае втекания – ровно наоборот. Далее все вклады суммируются. С точки зрения математики это просто поверхностный интеграл $\iint_S \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}$, где $\mathbf{n}$ – та самая нормаль.

Дивергенция. Вот мы и подошли ко второй голове змея – дивергенции. Идейно, дивергенция – это просто мощность источника (если отрицательная, то мощность ~~заборника~~). Я думаю, все так или иначе сталкивались с формулой $\operatorname{div} \mathbf{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$. Я также рискну утверждать, что если вы еще это читаете, то смысла в этой формуле вы видите достаточно мало. Откуда она берется? Все дело в том, что дивергенция – это, по сути, производная потока по объему. Действительно, вряд ли есть лучший способ охарактеризовать мощность потока, чем взять замкнутую поверхность, дать ей приращение по объему и посмотреть, как меняется в этом бесконечно малом промежутке поток. Как можно углядеть эту формулу? Если говорить очень грубо, то производная потока по объему – это бесконечно малое приращение потока, деленное на бесконечно малое приращение объема. Возьмем какую-нибудь точку на поверхности и посмотрим, чему будет равно приращение потока. В силу малости объема нормаль можно считать той же самой, и тогда приращение к вкладу в поток будет равно $\Delta \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}$. Теперь вспомним, что вот эта нормаль – это на самом деле вектор из произведений приращений аргументов, конкретно – $(dydz, dx dz, dx dy)$. Это тоже вполне

логично, ведь такая трактовка позволяет нам считать проекции на эти плоскости. Теперь поделим это скалярное произведение на малое приращение объема, которое равно $dxdydz$. Получим $\frac{\Delta a_x}{dx} + \frac{\Delta a_y}{dy} + \frac{\Delta a_z}{dz}$. Приблизительно приравнявая приращения и дифференциалы, приходим к той самой формуле. Я еще раз отмечу, что это очень нестрогое и грубое обоснование, направленное скорее на то, чтобы была уловлена идея. Не приведи вас Господь сказать так где-нибудь на экзамене по матану. С другой стороны, формальный вывод этой формулы следует той же логике, просто там не делается таких варварских приближений – там функции раскладываются в ряды и у этих рядов отбрасываются все члены, кроме линейного.

Теперь, кстати, и формула Остроградского-Гаусса приобретает смысл – ведь, по сути, семантически это то же самое, что ~~считать механическую работу по функции мощности~~, что нам знакомо со школьной скамьи. Поскольку, как мы выяснили, дивергенция – это мощность потока в объеме, совершенно логично считать поток через поверхность, интегрируя его мощность по объему, так же, как мы бы искали работу за какое-то время, интегрируя функцию мощности по промежутку времени.

Циркуляция. Наверное, циркуляция векторного поля – самый простой концепт из здесь приведенных, во многом потому, что это просто интеграл по контуру от векторного поля, а интеграл по контуру абсолютно идентичен классическому определенному интегралу с первого курса (или со школы), за исключением того, что разбивается на маленькие кусочки не координатная ось, а замкнутый контур и еще выбирается общее положительное направление для всех кусочков (оно выбирается так, что внутренняя часть контура все время по левую руку). Это нужно для того, чтобы посчитать скалярное произведение вектора в точке и, собственно, элементарной части кривой, сложить их и получить искомую циркуляцию. В целом, даже интеграл выглядит достаточно понятно: $\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l}$.

Ротор. Итак, последняя и самая страшная голова – громоздкая формула, получаемая через формальный определитель и невозможная к визуализации (наблюдать достаточно трудно визуализировать), да и слова про «степень завихрения» не очень-то интуитивно воспринимаются. Как вообще появился ротор? На самом деле, началось все с потенциальных полей (напомним, что это такие поля, интеграл которых по ~~любому пути~~ зависит только от начальной и конечной точек, или, что эквивалентно, интеграл которых по любому замкнутому контуру равен нулю). Нам хотелось бы иметь удобный критерий потенциальности векторно-

го поля, потому что проверка по определению предполагает перебор всех замкнутых путей, что, понятно, невозможно.

Начнем с того, что ротор определяется покомпонентно, по проекциям на каждую из базисных осей. Проекция на ось n определяется следующим образом:

$$rot_n \mathbf{A} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_L \mathbf{A} d\mathbf{l}}{\Delta S}.$$

Здесь контур L имеет площадь ΔS , которую мы устремляем к нулю. При этом контур строится в плоскости, перпендикулярной оси n . Давайте немного порассуждаем, а что вообще из такого вектора получится? На самом деле, здесь происходит приблизительно следующее (в терминах декартовой системы): берется замкнутый контур в пространстве, его площадь устремляется к нулю. Он проецируется на все координатные плоскости, и по каждой из этих проекций тоже берется циркуляция. В итоге получится вектор, который символизирует закрученность линий поля в окрестности точки. Для визуализации можно себе представить, например, речку, течение в которой начнет закручиваться, если в близко расположенных струях воды будет диссонанс по скоростям – отсюда и дифференциальная форма. Вышеупомянутая формула с определителем и наблой получается, если для каждой компоненты расписать циркуляцию, например, по прямоугольнику (в силу малости мы можем выбирать любую удобную фигуру), и вновь отбросить в ней нелинейные члены разложений.

Вспомним еще одну формулу – теорему Стокса, гласящую, что ~~поток ротора через поверхность равен циркуляции векторного поля по линии, ограничивающей эту поверхность.~~ Тут потребуются немного пространственного мышления, но идея в том, что поверхность разобьется на нужные нам маленькие кусочки, и каждая внутренняя сторона будет обходиться по одному разу в разные стороны, обнуляясь, что приведет нас к полной циркуляции только по граничным линиям. Заметим, что в этой же теореме и кроется нужный нам критерий потенциальности: если в любой точке пространства ротор вектора равен нулю, то циркуляция этого вектора по любому контуру будет выражаться через поток нулевого вектора и будет тоже равна нулю.

Здесь не учтены некоторые тонкие моменты: вышеупомянутые теоремы работают только при соблюдении определенных условий на поверхности, линии и тела. Однако же в физике, которая нам с вами сейчас предстоит, чаще всего с этими условиями все в порядке. Надеюсь, люди, дочитавшие до этого момента, вынесли для себя что-то полезное,

засим переходим к электродинамике.

1 Дайте определение точечного электрического заряда.

Точечным электрическим зарядом называется заряженное тело, размеры которого в рамках рассматриваемой задачи пренебрежимы.

2 Фундаментальные свойства электрического заряда. Закон сохранения заряда.

- Существуют заряды двух видов: положительные и отрицательные. Носителями минимально возможных по модулю зарядов являются протон и электрон соответственно, $e = 1.6 * 10^{-19}$ Кл.
- Заряд тела не зависит от выбора ИСО, в которой он измеряется.
- Заряд системы точечных зарядов равен алгебраической сумме зарядов, в нее входящих.
- Заряд любого тела квантуем, т.е., составляет целое число зарядов электрона.
- В изолированной системе (т.е., в такой, ~~в которой влияние внешних тел на которую пренебрежимо мало~~), общий заряд со временем не изменяется.

3 Сформулируйте Закон Кулона.

Два неподвижных точечных заряда действуют друг на друга с силой, прямо пропорциональной произведению их величин, обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними и коллинеарной линии, их соединяющей.

$$\mathbf{F}_{ij} = C * \frac{q_i q_j}{r_{ij}^2} * \mathbf{r}_{ij}$$

Константа C здесь может быть любой (как по величине, так и по размерности), от ~~ее выбора зависит, в какой системе единиц мы работаем~~. В нашем курсе эта константа равна $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$.

4 Дайте определение напряженности электрического поля.

Напряженностью электрического поля называется сила, действующая на помещенное в это поле пробный заряд. Для точечного заряда напряженность определяется формулой

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}.$$

Для дискретных и непрерывных распределений заряда при вычислении напряженностей используются соответственно конечная сумма и интеграл.

5 Сформулируйте принцип суперпозиции электрических полей.

Напряженность электрического поля, создаваемого системой зарядов, равна сумме напряженностей полей, создаваемых каждым из зарядов по отдельности.

6 Что показывают силовые линии электрического поля.

Касательная к силовой линии в любой точке показывает направление вектора напряженности в этой точке.

7 Дайте определение потока напряженности электрического поля.

$$\Phi_E = \oint_s \vec{E} d\vec{S}.$$

Неформально говоря, поток – это количество силовых линий, пронизывающих поверхность. Под вектором $d\vec{S}$ понимается вектор нормали к поверхности на ее бесконечно малом участке.

8 Сформулируйте электростатическую теорему Гаусса.

Поток вектора электрической индукции через замкнутую поверхность равен суммарному заряду в ней, или поток вектора напряженности через эту поверхность равен суммарному заряду в ней, деленному на ε_0 .

$$\oint_s \vec{D} d\vec{S} = Q_V, \quad V = \text{int}(S), \quad \vec{D} = \varepsilon_0 * \vec{E}$$

Важное уточнение – это формулировка теоремы для вакуума, в диэлектрике также нужно учитывать диэлектрическую проницаемость.

9 Напряженности электростатических полей равномерно заряженных сферы и бесконечной плоскости.

9.1 Сфера

Целевая функция - $E(r)$, начало координат в центре сферы, радиус сферы - R , заряд сферы - Q . Будем выбирать концентрические с данной сферы радиусом r . Для любого r , $\Phi_E = 4\pi E r^2$ (в силу симметрии и равномерности). Если $r < R$, то внутри любой такой сферы заряд равен нулю, откуда и $E = 0$. Вне сферы по той же формуле получаем, что $E(r) = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon \varepsilon_0}$.

9.2 Плоскость

Заметим сначала, что из соображений симметрии и равномерности вектор напряженности такой плоскости будет направлен перпендикулярно ей. Пусть поверхностная плотность заряда $\sigma = dQ/dS$. Возьмем цилиндрическое тело с основаниями, параллельными плоскости и лежащими по разные стороны от нее, площадь оснований - S . Поток вектора $\vec{D}$ через ее боковую поверхность будет равен нулю, так как нормаль к ней будет ему перпендикулярна, а суммарный поток через основания будет равен $2DS$. Заряд в этой поверхности же будет равен σS . Таким образом, по теореме Гаусса $D = \sigma/2$ или $E = \sigma/2\varepsilon\varepsilon_0$.

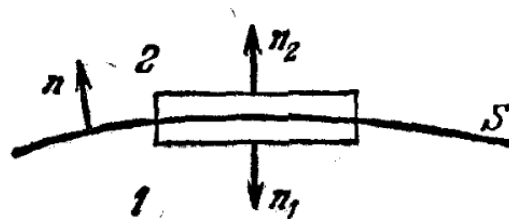


Рис. 22.

Рис. 1: Граничные условия – вывод

10 Запишите граничные условия для нормальной и тангенциальной составляющих напряженности электрического поля.

$$\epsilon_2 E_{n2} - \epsilon_1 E_{n1} = \sigma / \epsilon_0$$

$$E_{\tau 1} = E_{\tau 2}$$

$\epsilon_{1,2}$ обобщают условия на любые среды, разделяемые поверхностью. В случае вакуума они равны, понятно, 1. Во всех остальных вхождениях ϵ в формулах стоит понимать тем же образом.

Здесь рассматривается поверхность, разделяющая две среды и имеющая плотность заряда σ . Цилиндрическое тело строится таким образом, чтобы его основания, как и прежде, лежали по разные стороны от поверхности, а длина боковой стороны была пренебрежимо мала. После этого получаем, что суммарный поток через тело будет равен $E_{1n} + E_{2n} = \sigma / \epsilon_1 \epsilon_0 + \sigma / \epsilon_2 \epsilon_0$. Спроецировав вектора нормалей на единую нормаль к поверхности, показанную на рис. 1, получаем первое условие. Второе условие получается из следующих соображений: площадку, которая на поверхности цилиндра вырезается телом, при близких расстояниях можно считать бесконечно заряженной плоскостью, которая, как обсуждалось ранее, создает поле напряженностью $\sigma / 2\epsilon_1 \epsilon_0 + \sigma / 2\epsilon_2 \epsilon_0$. Это поле направлено по нормали к поверхности, что, во-первых, объясняет природу скачка, описываемого в первом условии, а, во-вторых, сразу же доказывает второе – внешнее поле меняется непрерывно, а у поля площадки есть только нормальная составляющая.

11 Как связана с зарядами дивергенция вектора напряженности электрического поля.

$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$, где ρ – плотность заряда. (т. Гаусса в дифференциальной форме)

12 Запишите формулы для напряженности электрического поля дискретного и непрерывного распределенный заряда.

(под жирными символами тоже понимаются вектора)

Дискретное распределение:

$$\vec{E}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)^2} * \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|} \right)$$

Непрерывное распределение:

$$\vec{E}(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')dV}{4\pi\varepsilon_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2} * \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

В обоих случаях мы действуем на основании принципа суперпозиции полей – во втором случае заряженное по закону $\rho(r)$ тело разбивается на бесконечно малые куски, которые считаются точечными зарядами – по ним и ведется интегрирование.

13 Как определяется потенциал электрического поля.

Потенциал электрического поля в данной точке определяется как работа, затраченная его кулоновскими силами на перемещение пробного заряда из данной в точку с нулевым потенциалом (выбирается произвольно). Обычно за нулевой потенциал удобно принять бесконечно удаленную точку, что приводит формулу для потенциала к виду:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}}^{\infty} \mathbf{E} d\mathbf{r}'$$

В частности, для поля точечного заряда этот интеграл равен

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

14 Запишите формулы для потенциала электрического поля дискретного и непрерывного распределений заряда.

Для дискретного:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N (\varphi_i(\mathbf{r})) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 \Delta r_i},$$

где $\Delta r_i = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|$.

Для непрерывного:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') dV}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Здесь используется тот факт, что потенциал аддитивен так же, как и сила.

15 Запишите формулу, показывающую локальную связь между потенциалом и напряженностью электрического поля.

$$\vec{E} = -grad(\varphi).$$

Эта формула, в целом, получается из определения самого потенциала и показывает, что вектор напряженности направлен к наибольшему убыванию потенциала – то есть, от большего к меньшему.

16 Приведите примеры эквипотенциальных поверхностей.

Как нетрудно вывести из формулы для потенциала, любая, например, сфера, в центре которой располагается точечный заряд (при этом других заряженных тел в системе нет), будет эквипотенциальной поверхностью, так как r на ней будет везде один и тот же.

В плоском конденсаторе эквипотенциальной поверхностью будет любая плоскость, параллельная обкладкам и лежащая между ними.

17 Что такое электрический диполь. Чему равны потенциал и напряженность поля электрического диполя.

Электрическим диполем называется система из двух точечных зарядов, равных по модулю ($q > 0$) и противоположных по знаку, находящихся на расстоянии l друг от друга. Дипольным моментом называется вектор $\mathbf{p} = ql$, где вектор $\mathbf{l}$ проведен от отрицательного заряда к положительному.

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}(1/r_+ - 1/r_-) = \frac{\mathbf{pr}}{4\pi r^3 \epsilon_0}.$$

Автор ненавидит школьную геометрию, но эта формула ~~выводится из теоремы косинусов. Следует построить координатные оси так, чтобы на оси x лежал диполь, разделенный началом координат напополам.~~

$$E(\mathbf{r}) = -\text{grad}(\varphi) = \frac{3(\mathbf{pn})\mathbf{n} - \mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

Автор ненавидит дифференцирование произведений функций от нескольких аргументов. Здесь, опять же, следует получить выражение хотя бы для одной переменной, а для других они будут симметричными. Вектор $\mathbf{n}$ здесь означает орт вектора $\mathbf{r}$.

18 Дайте определение электрического дипольного момента нейтральной системы зарядов.

В нейтральной системе зарядов, как понятно из названия, суммарный заряд входящих элементов равен нулю. Отсюда следует, что у тел, заряженных положительно и отрицательно, один и тот же суммарный заряд (по модулю). Поэтому в некотором приближении такая система может рассматриваться как диполь, а ее дипольный момент можно вычислить по формуле $\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N q_i * \mathbf{r}_i$.

19 Чему равна циркуляция вектора напряженности электростатического поля. Приведите доказательство для системы точечных зарядов.

Циркуляция вектора E – это интеграл по замкнутому контуру, взятый от этого вектора. Поскольку поле E потенциально, такой интеграл всегда будет равен нулю. Доказательство для системы точечных зарядов:

1. В силу принципа суперпозиции будет достаточно рассмотреть два заряда.
2. Допустим, заряд q_0 перемещает заряд q_1 из положения r_1 в положение r_2 . Поместим q_0 в начало координат.
3. $dA = \mathbf{F} d\mathbf{l} = \frac{q_0 q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}$.
4. $\int_{r_1}^{r_2} dA = \frac{q_0 q_1}{4\pi\epsilon_0} (1/r_2 - 1/r_1)$.
5. Получили, что работа не зависит от траектории, а только от начальной и конечной точки. Отсюда следует потенциальность поля E . Строго говоря, здесь приведено доказательство для одномерного случая, но оно может быть проведено для всех компонент вектора любой размерности аналогичным образом.

20 Чему равен ротор вектора напряженности электростатического поля. Приведите доказательство для системы точечных зарядов.

$$\oint_V \text{rot} \mathbf{E} dS' = \oint_S \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0 \implies \text{rot} \mathbf{E} = 0.$$

Здесь использована теорема Стокса, которая обосновывает первый переход.

21 Запишите уравнения Пуассона и Лапласа для потенциала электростатического поля.

1. $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon\epsilon_0} = -\text{grad}(\varphi).$

$$2. \text{ ~~div} E = \rho \implies \text{div} D = \frac{\rho}{\epsilon \epsilon_0}~~$$

$$3. \text{div}(\text{grad}(\varphi)) = \Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon \epsilon_0}.$$

При наличии свободных зарядов (3) называется уравнением Пуассона, при их отсутствии правая часть (3) обращается в ноль, и (3) называется уравнением Лапласа.

22 Свободные и связанные заряды в веществе.

В нашем курсе вещества делятся на два класса – проводник и диэлектрик. Проводники отличаются от диэлектриков тем, что являются носителями свободных зарядов, в диэлектриках же положительные и отрицательные заряды связаны. Эффект поляризации, возникающий при внесении в электрическое поле диэлектрика, заключается в том, что под действием этого поля молекулы диэлектрика ~~перераспределяются~~ и индуцируют на его поверхности заряд. Отсюда возникает поле поляризации, которое при небольших значениях внешнего поля от него зависит линейно.

23 Чему равны напряженность и потенциал электрического поля, а также плотность свободных зарядов внутри однородного проводника. Приведите доказательства утверждений.

Напряженность поля внутри проводника равна нулю, поскольку в противном случае в нем возникало бы движение свободных зарядов, продолжавшееся до тех пор, пока поле не будет уравновешено и снова не станет нулевым. Поскольку напряженность – градиент потенциала, внутри проводника он равен константе. По теореме Гаусса, ~~так как в любой замкнутой поверхности внутри проводника поле равно нулю~~, заряд в нем тоже будет равен нулю (то есть, заряды сосредоточены на границе).

24 Какова связь напряженности электрического поля у поверхности однородного проводника с поверхностной плотностью свободных зарядов.

$$\int_V \mathbf{E} dV = \oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \frac{Q}{\varepsilon\varepsilon_0}. \text{ (т. Гаусса и предыдущий пункт)}$$

Для малого фрагмента поверхности, $\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = E\Delta S$.

$$Q = \sigma * \Delta S, \text{ откуда } E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} \quad \blacktriangle$$

25 Плоский конденсатор и его электроемкость.

Конденсатором называется пара уединенных проводников (которые называют обкладками), расстояние между которыми много меньше расстояния до остальных тел. Конденсатор считается идеальным, если все силовые линии поля, выходящие из одного проводника, заканчиваются на другом. Экспериментально установлено, что суммарный заряд такой системы и разность потенциалов между двумя проводниками связаны линейно, и коэффициент $C = q/\Delta\varphi$ называется электроемкостью конденсатора.

В случае, когда мы имеем дело с двумя проводящими плоскостями имеющими заряды $\pm Q$, разность потенциалов между ними будет равна $E d = \frac{\sigma d}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{Qd}{\varepsilon\varepsilon_0 S}$. (первый переход обоснован тем, что линии поля перпендикулярны обеим обкладкам, а так же тем, что, в силу симметрии зарядов, результирующее поле будет равно удвоенному полю одной плоскости).

$$\text{Отсюда } C = Q/\Delta\varphi = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}.$$

26 Как рассчитать емкость батареи конденсаторов.

26.1 Параллельное соединение

При параллельном соединении, как видим на рис. 2, потенциалы в точках 1, 2, 3 равны φ_1 , а потенциалы в точках 4, 5, 6 – φ_2 . Поэтому результирующая ёмкость $C = \frac{\Sigma q}{\varphi_2 - \varphi_1} = \Sigma_{i=1}^N C_i$.

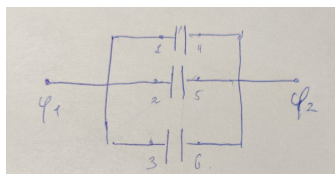


Рис. 2: Параллельное соединение.

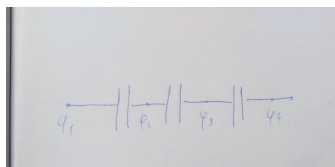


Рис. 3: Последовательное соединение.

26.2 Последовательное соединение

$C = \frac{\Sigma q}{\varphi_4 - \varphi_1}$. Заряды на обкладках равны между собой, так как соседние обкладки располагаются на одном и том же проводнике и уравниваются тем самым друг друга. Поэтому $\Delta\varphi = \frac{q}{C} = \Sigma \frac{q}{C_i} \implies \frac{1}{C} = \Sigma \frac{1}{C_i}$. (сумма падений напряжений на обкладках будет равна падению напряжения на всем участке, как показано на рис. 3).

27 Дайте определение вектора электрической поляризации.

Вектор электрической поляризации, как упоминалось ранее, возникает, когда диэлектрик попадает в электрическое поле и молекулы в нем начинают, как диполи, индуцировать заряд на его поверхности. Вектор поляризации определяется как дипольный момент единицы объема диэлектрика $\mathbf{P} = \frac{\Sigma_i \mathbf{p}}{\Delta V}$.

28 Что такое электрическая индукция поля.

Электрическая индукция поля определяется как вектор результирующего поля с учетом вектора поляризации, то есть $\mathbf{D} = \mathbf{P} + \mathbf{E}$. В нашем курсе рассматриваются линейные среды – то есть, такие, для которых $\mathbf{P} = \chi \epsilon_0 \mathbf{E}$. χ называют диэлектрической восприимчивостью.

востью диэлектрика, а вектор индукции записывается в форме $\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}$, где ε называется диэлектрической проницаемостью диэлектрика.

29 Сформулируйте теорему Гаусса для электрической индукции в интегральной и дифференциальной формах.

$$\int_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = Q_V, V = \text{int}(S)$$
$$\text{div} \mathbf{D} = \rho.$$

Эти соотношения элементарно выводятся из пп. 8 и 28.

30 Запишите граничные условия для вектора индукции электрического поля. Откуда они следуют?

$$D_{n2} - D_{n1} = \sigma$$
$$D_{\tau_1} = D_{\tau_2}.$$

Ссылаемся на то, что написано в п. 10 и линейную связь напряженности и индукции. Стоит отметить, что выражение для тангенциальной составляющей там доказано не очень строго, строгое доказательство получается примерно тем же подходом, но с использованием утверждения про циркуляцию вектора напряженности. (тогда попросту нужно взять интеграл по ~~контур проекции цилиндра~~ с б.м. образующими, где вклад нормальных составляющих будет сведен к нулю, и останется разность вкладов тангенциальных составляющих, равная нулю).

31 Материальные уравнения для электрического поля, диэлектрические восприимчивость и проницаемость.

Здесь стоит повторить все, что сказано в п. 28 – должно быть достаточно.

32 Взаимная энергия системы точечных зарядов, собственная энергия заряда.

Взаимной энергией системы зарядов называется сумма работ кулоновских сил, требуемых на то, чтобы каждый из этих зарядов увести на бесконечность (т.е., на уровень нулевого потенциала).

Вначале рассмотрим систему из двух зарядов, например, q_1, q_2 . Ее взаимной энергией будет называться энергия одного заряда в поле другого, то есть, $W_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$. В силу принципа суперпозиции, для большего числа зарядов нам попросту надо просуммировать для всех пар (i, j) эти выражения. Однако не стоит забывать, что в таком случае энергия каждой пары будет учтена дважды, а потому конечное выражение будет выглядеть так: $W_{repr} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi_i$.

Собственной энергией заряда называется взаимная энергия системы его компонент. Собственная энергия точечного заряда бесконечна (так как это нуль-мерный объект).

33 Энергия системы непрерывно распределенных зарядов (формула).

$$W(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \int_V \varphi(\mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'.$$

Логическая подоплека здесь ровно та же, что и при вычислении потенциала или напряженности при непрерывном распределении.

34 Запишите формулы для энергии электростатического поля и ее объемной плотности.

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{dW}{dV} = \frac{1}{2} \rho \varphi = \frac{1}{2} \mathbf{D} \mathbf{E} = \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 E^2. \\ W &= \frac{1}{2} \int_V \mathbf{D} \mathbf{E} dV = \sum_{i=1}^N q_i * \varphi_i.\end{aligned}$$

35 Чему равны сила и момент сил, действующие на точечный диполь в электрическом поле.

Пусть диполь расположен на оси x , а начало координат делит его пополам. Тогда $\mathbf{F} = q(\mathbf{E}(l/2, 0, 0) - \mathbf{E}(-l/2, 0, 0))$. Спроецируем $\mathbf{E}$ на каждую из осей и, в силу того, что диполь точечный, $E_{axis}(l/2, 0, 0) - E_{axis}(-l/2, 0, 0) \approx \frac{\partial E_{axis}}{\partial x} l$. Тогда $\mathbf{F} = q(l, \nabla)\mathbf{E} = (\mathbf{p}, \nabla)\mathbf{E}$.

$$\mathbf{M} = [l, \mathbf{F}] = [\mathbf{p}, \mathbf{E}].$$

36 Дайте определения силы электрического тока и плотности тока. Какова связь между ними.

Силой электрического тока I называется скалярная величина, показывающая, какой заряд протекает через сечение проводника за короткое время. $I = \frac{dQ}{dt}$. Плотностью тока называется взвешенное среднее значение скоростей элементарных зарядов на единицу объема, то есть, $\mathbf{j} = \frac{1}{\Delta V} \sum e_i \mathbf{v}_i$. Можно разбить эту сумму еще по знакам зарядов, и рассматривать отдельно плотность положительных и отрицательных зарядов.

Поток вектора плотности тока через какую-либо поверхность будет равен силе тока через неё, то есть, $I = \int_S dI = \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S}$.

37 Запишите уравнение непрерывности в интегральной и дифференциальной формах.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \oint_S \mathbf{j} d\mathbf{S} \quad (V = \text{int}(S)) \text{ - интегральная форма.}$$

По формуле Остроградского-Гаусса, можно заменить интеграл в правой части на $-\int_V \text{div} \mathbf{j} dV$. После этого, предполагая, что функция ρ непрерывна, поменяем в левой части уравнения дифференцирование и интегрирование местами. После этого, сняв один и тот же интеграл, придём к дифференциальной форме уравнения:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{j}) = 0.$$

Физический смысл этого уравнения состоит в том, что ~~единственным источником или затворником заряда в объеме может быть электрический ток~~.

38 Закон Ома для участка цепи и его дифференциальная форма.

Эмпирическим путем установлен тот факт, что $\mathbf{j}$ и $\mathbf{E}$ связаны линейно. Коэффициент $\lambda = \frac{j}{E}$ называют удельной проводимостью среды, а обратный к нему $\rho = \lambda^{-1}$ – удельным сопротивлением.

Вектор $\mathbf{E}$ складывается из напряженности кулоновских и порожденных сторонними силами полей. На участке цепи, где нет сторонних источников, имеем соотношение $\int \mathbf{E} d\mathbf{l} = \int \frac{j d\mathbf{l}^2}{\lambda dS} \Rightarrow \Delta\varphi = IR$.

39 Сопротивление и удельное сопротивление проводника. Проводимость и удельная проводимость проводника.

Как было сказано выше, удельной проводимостью среды называется коэффициент линейной связи между векторами напряженности поля и плотности тока, а удельным – ему обратный. Полное сопротивление $R = \int_l \frac{dl}{\lambda dS}$.

40 Как рассчитать сопротивление батареи проводников? Убедите экзаменатора в умении это делать.

Сопротивление последовательно соединенных проводников вычисляется по формуле $R = \sum_{i=1}^N R_i$. Сопротивление параллельно соединенных проводников вычисляется по формуле $\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}$.

41 Закон Джоуля-Ленца и его дифференциальная форма.

Рассчитаем мощность теплового воздействия электрического тока напрямую.

$$dP = \mathbf{F} \mathbf{v} n dV = q n \mathbf{v} \mathbf{E} dV = \mathbf{j} \mathbf{E} dV.$$

$$\frac{dP}{dV} = \mathbf{j} \mathbf{E} = \frac{j^2}{\lambda}. \quad (1)$$

$$\int_V dP = \mathbf{j} \mathbf{E} V = (\mathbf{j} \mathbf{S})(\mathbf{E} l) = IU. \quad (2)$$

(2) мы получили исходя из предположения, что проводник имеет цилиндрическую форму (обычный провод). (1) называется дифференциальной формой закона Джоуля-Ленца.

42 Сформулируйте правила Кирхгофа. Убедите экзаменатора в умении их применять.

(1) Алгебраическая сумма токов, входящих в любой узел, равна нулю.

(2) Сумма произведений алгебраических значений токов и сопротивлений участков, на которых они действуют, равна сумме сторонних ЭДС, действующих в контуре.

Первое правило есть закон сохранения заряда для замкнутого контура ($\text{div} \mathbf{j} = 0 \implies \Sigma I = 0$), то есть, учитываются плотности тока при противоположно направленных нормалях к узлу.

Второе правило – закон Ома, который, напомним, получается из утверждения о циркуляции вектора напряженности. Именно поэтому при его применении следует выбрать положительное направление обхода, а далее просто считать ЭДС и токи, что встретились нам – те, что имеют то же направление, будут входить с плюсом, а те, что имеют противоположное направление – с минусом. После этого можно перенести ЭДС в правую часть уравнения, и тогда мы получим, что левая часть конструируется через прямое добавление токов, помноженных на сопротивления (в том числе и на внутренние сопротивления ЭДС), по направлению, а правая – через обратное добавление ЭДС (т.е., ЭДС, которые мы встретили, входят с плюсом, если при обходе мы сначала встретили минус источника).

43 Закон сохранения энергии для цепей постоянного тока, содержащих э.д.с.

$$Q = I \mathcal{E}$$

Это следует из того, что работу по перемещению зарядов по контуру совершают только сторонние силы, так как кулоновские силы потенциальны.

44 Что такое линейный и объемный элементы тока.

Линейным элементом тока называется произведение вектора длины проводника и силы тока в нем. При этом проводник имеет такую конфигурацию, что его можно считать одномерным.

Объемным элементом тока называется преобразованный при не столь пренебрежимых размерах сечения линейный элемент тока, и является векторной величиной: $I d\mathbf{l} = \mathbf{j} dS d\mathbf{l} = \mathbf{j} dV$.

45 Запишите закон взаимодействия элементов тока – закон Ампера.

Движущийся ~~в проводнике~~ заряд создает еще одно поле – магнитное. Его силовой характеристикой является вектор $\mathbf{B}$.

Закон Ампера гласит, что на элемент проводника магнитное поле действует с силой $d\mathbf{F} = I[d\mathbf{l}, \mathbf{B}]$.

46 Что такое вектор магнитной индукции поля. Запишите закон Био-Савара-Лапласа.

Прим.: для пущей логической связности я поменял местами вопросы 46 и 47.

При рассмотрении проводников с током в различных системах отсчёта было установлено, что сила взаимодействия между ними чуть меньше, чем аналитически рассчитанная кулоновская. Это и привело к понятию магнитного поля. Отметим, что магнитное поле имеет существенный вклад относительно электрического только при достаточно больших скоростях частиц – дело в том, что магнитные силы имеют относительно кулоновских порядок $\frac{v^2}{c^2}$, что было получено, опять же, расчетным путем. Тем не менее, в ситуациях, когда

кулоновские поля не проявляются (~~экранируются~~, например), влияние магнитных имеет место.

Как было сказано ранее, вектор индукции $\mathbf{B}$ является силовой характеристикой магнитного поля.

Закон Био-Савара-Лапласа для замкнутых токов:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{I[d\mathbf{l}, \mathbf{R}]}{R^3}.$$

Здесь $\mathbf{R}$ – вектор, проведенный из элемента тока к $\mathbf{r}$.

Закон для объемных токов получается путем занесения I в векторное произведение и преобразования $I d\mathbf{l} = \mathbf{j} dV$.

47 Не противоречит ли закон Ампера третьему закону Ньютона.

Закон Ампера противоречит третьему закону Ньютона, потому что в выражении силы $dF_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[I_2 d\mathbf{l}_2, [I_1 d\mathbf{l}_1, \mathbf{r}_{12}]]}{r_{12}^3}$ участвует операция двойного векторного произведения, не являющаяся ассоциативной. Поэтому при вычислении dF_{21} , которое, очевидно, состоит в простой перестановке индексов, мы в общем случае не получим коллинеарных векторов. Однако доказано, что для двух замкнутых контуров третий закон выполнен. Стоит отметить, что это несоответствие – не есть проблема, так как в природе элементарных токов не существует.

48 Чему равны индукция магнитного поля прямого бесконечного провода с током.

Очевидно, что в силу симметрии единственный аргумент $B(r)$ – это длина перпендикуляра, опущенного к проводу из искомой точки. Далее, из точки на перпендикуляре проводим под углом $\alpha \in [0, \pi/2]$ отрезок к точке на проводе, получаем зависимость $dl(d\alpha)$ (векторное произведение в законе Био-Савара-Лапласа будет иметь одно и то же направление, а его модуль выражается через α). Считаем зависимость для полубесконечного провода, удваиваем и получаем $B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$.

49 Линии магнитной индукции и их свойства.

Как и в случае с электрическим полем, линии магнитной индукции в любой точке имеют касательный вектор, равный по направлению вектору индукции в этой точке. Важное свойство линий магнитной индукции заключается в том, что они замкнуты – у них нет начала и конца, что свидетельствует о том, что у магнитного поля нет собственных источников.

50 Сформулируйте теорему о циркуляции магнитной индукции в интегральной и дифференциальной формах.

Введем понятие ~~магнитного момента~~, свойства молекул некоторых веществ порождают дополнительное магнитное поле при помещении во внешнее. Этот эффект аналогичен поляризации диэлектриков. В диамагнетиках он возникает за счет изменения движения электронов и создания в нем тока, индуцирующего дополнительное поле, в парамагнетиках молекулы обладают магнитным моментом по умолчанию и выстраиваются так, что создается дополнительное поле при внешнем, ~~но в вакууме за счёт электронов их суммарное поле равно нулю~~, наконец, ферро- и ферромагнетики приобретают магнитный момент во внешнем поле за счет спинов – механических моментов, которые изучаются в квантовой физике. Аналогичным с электростатикой образом вводится вектор намагниченности $\mathbf{J}$. Вектор ~~магнитной~~ напряженности определяется как $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{J}$. Как, опять же, и в случае с электрическими полями, вектор намагниченности при малых полях линейно зависит от вектора магнитной напряженности, что позволяет записать $\mathbf{B} = (1 + \chi)\mu_0\mathbf{H} = \mu\mu_0\mathbf{H}$. (μ – магнитная проницаемость, χ – магнитная восприимчивость).

Теорема о циркуляции ~~магнитной индукции~~

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \Sigma I$$

$$\int_S \text{rot}(\mathbf{H}) d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S} \text{ (т. Стокса и определение суммы токов через поток плотности)}$$

$$\text{Отсюда } \text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j}$$

51 Сформулируйте теорему Гаусса для магнитного поля в интегральной и дифференциальной формах

Полный поток магнитного поля через любую замкнутую поверхность равен нулю:

$$\int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0 \quad (1)$$

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{B} dV = 0 \quad (\text{т. Остроградского-Гаусса})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (2)$$

(1) – интегральная, (2) – дифференциальная форма. Физический смысл этой теоремы заключается в том, что, в отличие от электрических полей, магнитные поля возникают только под действием движущихся зарядов, а собственных источников у них нет.

52 Что такое векторный потенциал. Как он связан с магнитной индукцией. Свойства векторного потенциала.

Из векторного анализа мы знаем, что $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{X}) = 0$ для любого вектора $\mathbf{X}$. Это соотношение, в совокупности с одним из уравнений Максвелла $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ позволяет нам записать индукцию $\mathbf{B}$ как ротор некоторого векторного поля $\mathbf{A}$.

Поле $\mathbf{A}$ называется векторным потенциалом магнитного поля. Вполне очевидно, что одного вышеуказанного условия недостаточно для однозначного определения векторного потенциала, поскольку, например, для любой функции χ поле $\mathbf{A} + \operatorname{grad} \chi$ также будет векторным потенциалом $\mathbf{B}$.

Это свойство позволяет нам накладывать на векторный потенциал дополнительные ограничения, чтобы ~~сужать круг решений~~ системы дифференциальных уравнений. Наложение таких ограничений называется калибровкой. Чаще всего выбирается ограничение вида $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$, затем из уравнений Максвелла выводится формула для векторного потенциала:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \implies \operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\mathbf{A})) = \mu_0 \mathbf{j}$$

По формуле из векторного анализа,

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\mathbf{A})) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}(\mathbf{A})) - \Delta \mathbf{A} \implies \Delta \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}.$$

Получили систему дифференциальных уравнений Пуассона относительно каждой компоненты векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{j}$. По аналогии с потенциалом электростатического поля,

получаем

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{j dV}{r}.$$

Отметим, что закон Био-Савара-Лапласа можно вывести из этой формулы.

53 Чему равна индукция магнитного поля плоского витка с током.

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + r_z^2)^{3/2}} \mathbf{k}.$$

Эта задача разобрана как пример в Нетребко, я лишь отмечу, что поле направлено строго по оси z благодаря круговой симметрии при интегрировании (компоненты x и y будут интегралом по полному кругу тригонометрических функций и будут равны нулю).

54 Чему равны сила и момент сил, действующие на элементарный ток в магнитном поле.

По закону Ампера, как мы знаем, сила, действующая на элементарный ток в магнитном поле, равна $F = I \oint_L [d\mathbf{l}, \mathbf{B}]$. Элементарным называется ток, являющийся замкнутым и таким, что внешнее поле, действующее на него, можно считать константным.

Момент сил, действующий на элементарный ток, соответственно, вычисляется по формуле $\mathbf{M} = I \oint_L [\mathbf{r}, [d\mathbf{l}, \mathbf{B}]]$. Можно переписать эту же формулу через магнитный момент ($\mathbf{p}_m = \int_V [\mathbf{r}, \mathbf{j}(\mathbf{r})] dV$) для некоторых полей.

55 Сила Лоренца и характер движения заряда в постоянных электрическом и магнитном полях.

Сила Лоренца определяется как сила, действующая в магнитном поле на заряженную частицу, имеющую скорость $\mathbf{v}$.

$$\mathbf{F} = q[\mathbf{v}, \mathbf{B}].$$

Видим, что сила Лоренца перпендикулярна скорости, а потому меняет только ~~траекте-
рию~~ движения. Если кроме магнитного поля действует еще электростатическое, для полу-
чения полной силы, действующей на заряд, нужно еще прибавить qE .

В общем случае заряженная частица в таком поле будет двигаться по спирали.

56 Сформулируйте закон электромагнитной индукции Фа- радея и правило Ленца.

Закон Фарадея:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Этот закон был получен экспериментально и показывает, что изменение магнитного по-
тока через контур (~~засчет~~ изменения самого контура или ~~засчет~~ изменения источника маг-
нитного поля) порождает в нем электродвижущие силы (ЭДС индукции). ~~Знак в формуле
означает противоположность векторов нормали к контуру и индукции.~~

Правило Ленца гласит, что ток, порожденный изменением магнитного потока, направлен
так, что создаваемый им магнитный поток направлен на компенсацию этого изменения. Это
еще одно обоснование минуса в законе Фарадея.

57 В чем заключается явление самоиндукции.

Как отмечено выше, причиной изменения магнитного потока через контур может слу-
жить и изменение силы тока в контуре. В соответствии с законом Фарадея, при таком
изменении тоже будет возникать ЭДС, которая и называется ЭДС самоиндукции.

Отношение между магнитным потоком через контур и силой тока в нём называется
индуктивностью $L = \frac{\Phi}{I}$ (линейное соотношение между магнитной индукцией и силой тока,
а соответственно, и между магнитным потоком и силой тока, устанавливается в законе
Био-Савара-Лапласа).

В соответствии с вышеуказанной формулой, можно записать $\mathcal{E}_{\text{сind}} = -L \frac{dI}{dt}$.

58 Что характеризует коэффициент самоиндукции (индуктивность).

Описано выше.

59 Чему равны собственная энергия проводника с током и энергия системы замкнутых токов.

Запишем вначале выражение для элементарной работы магнитного поля, создаваемого проводником с током:

$$dA = -\mathcal{E}_{ind} Idt = Id\Phi = LI dI.$$

При совершении этой работы происходит превращение энергии ЭДС сторонних сил в энергию проводника, поэтому $dW = dA$. Интегрируя, получаем

$$W = \frac{LI^2}{2}.$$

При рассмотрении системы замкнутых токов можно руководствоваться теми же соображениями, но нужно учитывать, что изменить магнитный поток через каждый из контуров может и магнитное поле других контуров.

Здесь вводится понятие взаимной индуктивности. С помощью векторных потенциалов достаточно легко посчитать воздействие магнитных полей на контуры друг друга:

$$\Phi_{12} = \int_{S_2} \text{rot}(\mathbf{A}_1) d\mathbf{S} = \oint_{L_2} \mathbf{A}_1 d\mathbf{l}_2. \text{ (т. Стокса)}$$

Аналогичное выражение получается для потока второго поля через первый контур.

Далее, в соответствии с выражением для векторного потенциала (п. 52),

$$\Phi_{12} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{L_2} \oint_{L_1} \frac{d\mathbf{l}_1 d\mathbf{l}_2}{r_{12}}.$$

Поток магнитного поля второго контура через первый будет иметь такую же формулу, но с другим порядком интегрирования и с другой силой тока. Взаимная индуктивность определяется как $L_{ik} = \Phi_{ik}/I_i$. Нетрудно заметить, что $L_{ik} = L_{ki}$ (так как останется только поменять порядок интегрирования, что мы сделать можем), и тогда полная энергия любой системы контуров с учетом всех взаимодействий (и собственных) может быть записана как

$$W = \frac{1}{2} \sum_{(i,k)} L_{ik} I_i I_k.$$

Здесь индексы пробегает по всем парам чисел, не превосходящих количество контуров в системе.

60 Запишите формулы для энергии магнитного поля и ее объемной плотности.

$$W = \frac{LI^2}{2} = \frac{\Phi I}{2} = \frac{I}{2} \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = \frac{I}{2} \int_S \text{rot}(\mathbf{A}) d\mathbf{S} = \frac{I}{2} \oint_L \mathbf{A} d\mathbf{l} = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{A} \mathbf{j} dV.$$

$$\mathbf{B} = \text{rot}(\mathbf{A}); \mathbf{j} = \text{rot}(\mathbf{H}).$$

Теперь воспользуемся тем, что $\text{div}([\mathbf{A}, \mathbf{H}]) = \mathbf{H} \text{rot}(\mathbf{A}) - \mathbf{A} \text{rot}(\mathbf{H})$.

Отсюда получаем, что $\mathbf{A} \mathbf{j} = \mathbf{H} \mathbf{B} - \text{div}[\mathbf{A}, \mathbf{H}]$.

Далее, $\int_V \text{div}[\mathbf{A}, \mathbf{H}] dV = \int_S [\mathbf{A}, \mathbf{H}] d\mathbf{S}$. С расширением r до рассматриваемой области,

$\mathbf{A} \mathbf{H} \sim \frac{1}{r^3}$, $d\mathbf{S} \sim r^2$. Поэтому весь интеграл будет убывать порядком r^{-1} и на всем

пространстве стремиться к нулю.

Остается, что $W = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \mathbf{B} dV$, объемная плотность $\omega = dW/dV = \frac{1}{2} \mathbf{H} \mathbf{B}$.

61 Молекулярные токи и вектор намагниченности.

Про вектор намагниченности и магнитные моменты молекул различных веществ сказано в п. 50.

62 Дайте определение вектора напряженности магнитного поля.

Смотреть п.50.

63 Сформулируйте теорему о циркуляции вектора напряженности магнитного поля (в интегральной и дифференциальной формах).

Дублирование вопроса 50. (с учетом материальных условий!)

64 Запишите материальные уравнения для магнитного поля. Что характеризуют магнитные восприимчивость и проницаемость вещества.

Все тот же сакральный вопрос 50.

65 Граничные условия для векторов напряженности и индукции магнитного поля.

Пусть две среды с магнитными проницаемостями $\mu_{1,2}$ разделены проводящей поверхностью, по которой течет ток плотностью i . Как и в случае с граничными условиями для векторов напряженности и индукции, возьмем бесконечно малое в образующих ~~призматическое тело~~ основание которого лежат в разных средах. Далее посчитаем циркуляцию вектора $\mathbf{H}$ по какой-нибудь его двумерной проекции, которая равна, в силу теоремы, il . В то же время, учитывая, что вклад нормальных составляющих ничтожно мал, получим, что $H_{2\tau} - H_{1\tau} = i$. Далее, поскольку поток индукции ~~через призму~~ равен нулю, нормальные составляющие индукций равны (при проекциях на одну нормаль). Для напряженностей соотношение можно преобразовать в соответствии с материальными уравнениями: $\mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}$.

66 Что такое ток смещения.

Рассмотрим цепь с конденсатором. Постоянный ток не течет через конденсатор, а переменный ~~– течет~~. Однако, поскольку конденсатор является ~~по сути~~ разрывом цепи, протека-

ние переменного тока через конденсатор не может быть обусловлено током проводимости, который рассматривался нами до этого момента.

Вектор смещения $\mathbf{D}$ – это электрическая индукция в конденсаторе, которое в случае обычного плоского конденсатора равна σ . Ток смещения $\mathbf{j}_{bias} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$.

~~В уравнении Максвелла был учтен ток смещения, поскольку Максвелл пришёл к выводу, что это не просто формальное соотношение, а закон, определяющий иной вид тока, который порождает магнитное поле так же, как и ток проводимости. Поэтому $\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$.~~

67 Запишите уравнения Максвелла в дифференциальной форме.

$\text{div} \mathbf{B} = 0$ – магнитное поле не имеет собственных источников.

$\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ – токи смещения и проводимости порождают вихревое магнитное поле.

$\text{div} \mathbf{D} = \rho$ – электрический заряд – источник электрической индукции.

$\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ – изменение магнитного поля порождает вихревое электрическое.

68 Запишите уравнения Максвелла в интегральной форме.

$$\begin{aligned}\int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} &= 0 \\ \oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} &= I + \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} d\mathbf{S} \\ \int_S \mathbf{D} d\mathbf{S} &= Q_{intS} \\ \oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} &= -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}.\end{aligned}$$

69 Сколько решений имеет система уравнений Максвелла. Ответ обоснуйте.

Система уравнений Максвелла, приведенная выше, имеет бесконечно много решений, так как не является замкнутой. Ее можно дополнить материальными уравнениями, сделав тем самым замкнутой.

70 Дайте определение и запишите выражение для вектора Умова-Пойнтинга.

Пусть в замкнутом объеме V действует электромагнитное поле и протекают токи. Для простоты предположим, что никаких других преобразований энергии в этом объеме не происходит. Полная теплота, выделяемая токами, будет равна

$$P = \int_V \mathbf{j} \mathbf{E} dV = \int_V \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H} dV - \int_V \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} dV.$$

$$\text{Так как } \operatorname{div}[\mathbf{E}, \mathbf{H}] = \operatorname{rot} \mathbf{E} * \mathbf{H} - \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H},$$

$$P = - \int_V \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \mathbf{H} dV - \int_V \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} dV - \int_V \operatorname{div}[\mathbf{E}, \mathbf{H}] dV. \text{ Теперь воспользуемся тем, что}$$

$$\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial(\mathbf{E} \mathbf{D})}{\partial t} \text{ и } \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial(\mathbf{H} \mathbf{B})}{\partial t}.$$

Поменяем местами дифференцирование и интегрирование, а в третьем интеграле

воспользуемся теоремой Остроградского-Гаусса. Получим:

$$P = - \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \int_V (\mathbf{E} \mathbf{D} + \mathbf{H} \mathbf{B}) dV \right] - \int_\sigma [\mathbf{E}, \mathbf{H}] d\sigma.$$

$\mathbf{S} = [\mathbf{E}, \mathbf{H}]$ – вектор Умова-Пойнтинга, выражающий плотность потока энергии через поверхность σ , ограничивающую область V .

71 Получите волновое уравнение из системы уравнений Максвелла.

Рассмотрим систему уравнений Максвелла, дополненных материальными условиями:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}.$$

Предположим, что среда непроводящая и ее проницаемости соответствуют материальным уравнениям. Тогда $\rho = 0$ и $\mathbf{j} = 0$. Точки над переменными будут обозначать, как и ранее, их производную по времени. С учетом всех условий, уравнения примут следующий вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \dot{\mathbf{D}}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}.$$

Перейдем к обозначениям через наблу, продифференцируем второе уравнение по времени и подставим в него четвертое. Также воспользуемся материальными условиями:

$$\ddot{\mathbf{D}} = -\frac{1}{\mu\mu_0}(\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E})).$$

Двойное векторное произведение можно преобразовать как

$$\nabla(\nabla \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E}.$$

По условию, первое слагаемое здесь равно нулю. В итоге, раскрывая все условия и перенося в левую часть множителя, получаем:

$$\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\ddot{\mathbf{E}} = \Delta \mathbf{E}.$$

Симметричным образом получаем уравнение на $\mathbf{H}$:

$$\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\ddot{\mathbf{H}} = \Delta \mathbf{H}.$$

72 Что такое плоская волна.

Перепишем уравнения Максвелла в удобной форме (уравнения дивергенций опустим):

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -\mu\mu_0\dot{\mathbf{H}}$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = -\mu\mu_0\dot{\mathbf{E}}$$

Направим ось x перпендикулярно волновым плоскостям. Оси y и z будут направлены так, как показано на рисунке 4. Заметим, что волны не зависят от этих переменных, а значит, все производные по ним можно обнулить. Здесь мы получим систему из восьми уравнений, показанную на рис. 5. Производные x -составляющих векторов $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$ равны нулю и по времени, и по координате x . Это значит, что эти составляющие задают какие-то дополнительные константные поля, не зависящие от времени и пространства, и их можно считать нулевыми. Больше того, это значит, что вектора $\mathbf{H}$ и $\mathbf{B}$ будут все время перпендикулярны оси x , то есть, они колеблются в плоскости, перпендикулярной скорости распространения волны – это значит, это поперечная волна. Отвечая на вопрос билета, плоская волна – волна, у которой поверхность постоянной фазы есть плоскость, в чем мы сейчас и убедились.

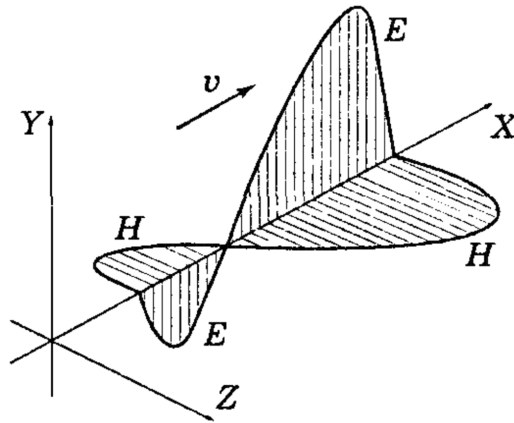


Рис. 4: ЭМ-волны.

73 Нарисуйте взаимную ориентацию полевых векторов и волнового вектора в плоской волне. Поляризации электромагнитной волны.

Ориентация нарисована на рис. 4. (волновой вектор в данном случае – ось x). Обратим еще раз внимание на систему на рис. 5. В ней можно выделить две пары уравнений (конкретно – третье и шестое, второе и седьмое), которые по отдельности определяют перпендикулярные составляющие для волн электрического и магнитного полей, причем по обеим осям y, z . Больше того, заметим, что колебания, например, E_y будут порождать колебания H_z в соответствии с уравнениями Максвелла, и наоборот. Это значит, что произвольная электромагнитная волна, представленная соотношениями с рисунка 5, может быть представлена и как композиция двух волн, составляющие которых в любой фазовой плоскости колеблются перпендикулярно друг другу. Волну, где колеблются E_y и H_z , называют горизонтальной поляризацией, волну, где колеблется другая пара – вертикальной.

$$0 = \mu\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t};$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t};$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t};$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} = \mu\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial x} = 0;$$

$$0 = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t};$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = -\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t};$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t};$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0.$$

Рис. 5: Решение системы уравнений относительно производных.

74 Чему равны плотность потока энергии и плотность потока импульса электромагнитной волны.

Плотность потока энергии выражается вектором Умова-Пойнтинга, выведенным выше. Его норма – это числовое значение этой энергии, переносимое через площадку единичной площади перпендикулярно ему. Плотность потока импульса рассчитаем так: допустим, волна падает перпендикулярно на плоскую поверхность некоторого проводящего тела, проницаемости которого равны единице. В соответствии с уравнениями Максвелла и материальными условиями, в теле возбудится ток плотностью $\lambda \mathbf{E}$. Магнитная составляющая будет действовать на ток с силой $\mu_0[\mathbf{j}, \mathbf{H}]$. Если положить волны взаимно перпендикулярными, то это будет просто произведением $\mu_0 j H$, тогда изменение кинетической энергии $dW_k = \mu_0 j H dV$. В то же время, полное изменение энергии $dW = j E dV$. Отсюда $dW_k/dW = \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} = 1/c$. Окончательно получаем, что $K = \omega/c$, где ω – объемная плотность потока энергии.

75 Приведите примеры интерференции электромагнитных волн.

Когерентные волны – волны, разность фаз которых не зависит от времени. Интерференция – явление угасания общей амплитуды при сложении когерентных волн. В пример можно привести темно-светлые полосы, возникающие при наложении световых волн (свет – это тоже ЭМ-волна).

76 Излучение электромагнитных волн диполем. Зависимость излучаемой мощности от частоты.

Поговорим вначале о векторном и скалярном потенциалах для электромагнитных волн (сначала для любых, удовлетворяющих только тем материальным условиям, что уже были наложены сверху). Как понятно из свойств этих волн, их потенциалы тоже будут зависеть от времени и пространства. Больше того, они так же неоднозначны, как и их стационарные

аналоги, поэтому здесь тоже выбирается определенное калибровочное условие, называемое калибровкой Лоренца:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \mu\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0.$$

Здесь φ – по-прежнему потенциал электрического поля. Есть, однако, небольшой нюанс: поскольку поля нестационарны, формула для напряженности будет выглядеть так: $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$. Это следует напрямую из уравнения $\operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{rot}(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t})$. (из него следует потенциальность поля, смещенного на изменение векторного потенциала, а физический смысл этой зависимости в том, что изменения магнитного потока через любую поверхность, вызванные в том числе и изменениями магнитного поля, порождают электрическое поле – закон Фарадея). Выведем из уравнений Максвелла уравнение на векторный потенциал, при котором эффективность такой калибровки будет видна.

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu \mathbf{j} + \varepsilon \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Пользуясь тем, что $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{A}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}$ и раскрывая выражение на $\mathbf{E}$,

$$\Delta \mathbf{A} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{j} + \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{A} + \mu\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t}).$$

Здесь мы пользуемся вышеуказанным условием, а далее решаем волновые уравнения для каждой из координат. Для скалярного потенциала можно получить такое же уравнение, воспользовавшись уравнением $\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho/\varepsilon$.

Еще в курсе механики было установлено, что волновое уравнение имеет решение вида $f(t - x/v) + f(t + x/v)$, где f – функция в правой части уравнения. Первое слагаемое задает волну, которая распространяется по оси x со скоростью v , второе – волну, распространяющуюся по той же оси с той же скоростью в противоположном направлении. Возьмем слагаемое с минусом и запишем формулы для векторного и скалярного потенциала, агрегировав по компонентам:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \oint \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/v) dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

.

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi\varepsilon} \oint \frac{\rho(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/v) dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Попробуем понять, что же тут написано. Стоит сразу указать главный физический смысл этих формул: в любой точке пространства волна генерирует такой же потенциал и такое же магнитное поле, как и стационарный заряд или ток, но с той лишь разницей, что в случае волны это происходит со смещением во времени, задающимся координатой. Такие потенциалы называются потенциалами с запаздыванием. Мы могли бы выбрать и решения волнового уравнения со знаком плюс – тогда бы мы получили потенциалы с опережением. В них относительно нашей теории не очень много смысла, потому что получалось бы так, что поля появляются до появления токов или зарядов в системе. Интегралы здесь по той причине, что потенциалы все так же аддитивны.

После описания всего этого переходим, наконец, к диполю. Его скалярный потенциал будет задаваться, в соответствии с вышеуказанным, так:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\xi, t - r'/c)}{r'} dV_\xi.$$

Здесь $r' = r - \xi$, а ξ – радиус-вектор к элементарному объему. Пропуская пространные разложения функций в ряд, получим, что

$$\varphi \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int \rho dV_\xi - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \int \rho \xi dV_\xi.$$

Каким-то чудом вспоминаем, что, поскольку система в общем электрически нейтральная, первый интеграл будет равен нулю, а второй интеграл будет равен дипольному моменту. Поэтому

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\mathbf{p}(\mathbf{r}, t - r/c)).$$

Здесь можно углядеть, что мы получили ни что иное, как дивергенцию нашего дипольного момента в сферических координатах (производную по радиусу умножили скалярно на орт радиальной оси). Потому окончательно наш потенциал будет описан как

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \operatorname{div} \frac{\mathbf{p}(\mathbf{r}, t - r/c)}{r}.$$

Как мы видим, вывод потенциала даже в такой конфигурации – **болезненная** задача. Разумеется, это только скалярный потенциал – векторный, в целом, считается аналогичным образом. Посчитав его, мы возьмем по известным формулам $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ и $\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$,

что даст нам вектор Умова-Пойнтинга и, соответственно, выражение для плотности потока энергии, через который элементарно выражается и поток импульса. Огромный вывод общего выражения в Матвееве для произвольной осциллирующей функции через полярные координаты **не нужен** читателю с ВМК, так что мы ограничимся колебаниями вида $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 e^{i\omega t}$. Итак, чтобы рассчитать эту самую плотность, нам необходимы две проекции магнитного и электрического полей на ортогональные оси – так как мы считаем в полярной системе, это будут оси α и θ . Выражения имеют вид:

$$B_\alpha = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\omega^2}{c} \Pi \sin\theta$$

$$E_\theta = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\omega^2}{c^2} \Pi \sin\theta$$

Здесь Π – собственно выражение нашего осциллирующего дипольного момента, вернее, его значение. Эти вектора перпендикулярны, поэтому вектор Умова-Пойнтинга по норме будет выражен простым произведением этих значений, а результирующий поток энергии будет равен $\frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{\omega^4 p_0^2}{c^3} \cos^2 \omega(t - r/c)$.

Поскольку поток импульса – это вектор Умова-Пойнтинга, деленный на скорость света в квадрате, посчитать его труда не составит.

77 Дайте определение квазистационарных электромагнитных процессов.

Квазистационарным называются процесс, время протекания которого столь мало, что его влияние на систему, в которой он протекает, пренебрежимо. К таким процессам относятся, например, те, в которых можно пренебречь токами смещения.

78 Приведите примеры расчета тока в электрических цепях при переходных процессах (RC- и RL-цепи).

Рассмотрим вначале наиболее общий случай цепи с квазистационарными процессами – RLC-цепь, в которую включена переменная ЭДС.

Запишем для такой цепи второе правило Кирхгофа:

$$L\dot{I} + RI + q/C = \mathcal{E}$$

Дифференцируем по времени, получим

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{I}{C} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}$$

Для RC-цепи обнулیم L. Предположим, что к цепи подключена постоянная ЭДС U_0 , тогда решение полученного линейного диффура запишется в виде $I = I_0 * \exp(-t/RC)$, где $I_0 = U_0/R$, если считать, что ЭДС подключена в нулевой момент времени. Физически это уравнение значит, что ток в цепи будет течь до тех пор, пока конденсатор не зарядится так, что разность потенциалов на его обкладках будет компенсировать разность потенциалов на ЭДС. Если ЭДС закоротить (выключить), то в цепи будет течь по тому же закону ток от некомпенсированной разности потенциалов на конденсаторе.

Для RL-цепи конденсатор заменим проводом (формально говоря, емкость провода бесконечна и последнее слагаемое в левой части диффура обнулится) и, как и прежде, подключим постоянную ЭДС. Начальным условием возьмем $I(0) = 0$. Решать будем первый из двух написанных выше диффуров, так как дифференцировать по времени смысла нет. Решение: $I(t) = U_0/R[1 - \exp(-Rt/L)]$. Физически такое поведение тока объясняется законом Фарадея – в катушке будет возникать ЭДС самоиндукции, которая будет замедлять нарастание силы тока по правилу Ленца. На бесконечности, в соответствии с законом Ома, мы получим значение силы тока U_0/R .

79 Собственные колебания в колебательном контуре.

Колебательным контуром называется RLC-цепь, в которой происходит обмен энергией между конденсатором и катушкой (отсюда и колебания). Условием собственных колебаний является отсутствие сторонних ЭДС. Еще раз посмотрим на диффуры сверху:

$$\ddot{I} + \frac{R}{L}\dot{I} + \frac{I}{LC} = 0$$

Видим уравнение затухающих колебаний из прошлого семестра: здесь собственная частота будет равна $\frac{1}{\sqrt{LC}}$, а декремент затухания – $\frac{R}{2L}$. Что вполне логично, при равенстве сопротивления нулю никакого затухания не происходит – ведь именно за счет него энергия, сообщенная изначально конденсатору или катушке, превращается в тепловую при переходах и уходит из системы. Так как в собственных колебаниях внешних воздействий нет, в

нашем случае мы и принимаем его за ноль. Поэтому $I = I_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$.

80 Вынужденные колебания в колебательном контуре под действием гармонической силы. Формулы для амплитуды и фазы.

Тут мы вновь обращаемся к первому из двух диффузов в в. 78 и пользуемся тем, что $I = dq/dt$. В правой части по условию будет стоять гармонически изменяющаяся ЭДС $\mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \varphi_1)$. Отметим, что частота колебаний ЭДС со временем совпадет с частотой вынужденных колебаний в контуре. Кроме того, энергия этого источника будет компенсировать потери энергии на сопротивлении.

Решение диффура относительно ~~заряда~~ $q = q_0 \cos(\omega t - \psi)$, где ψ – разность фаз между источником и ~~контуром~~.

Формула на амплитудный заряд выводится методом комплексных амплитуд. Формула на фазу выводится так же – надо поделить ЭДС источника в комплексном виде на напряжение на контуре, и все будет хорошо.

$$q_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega \sqrt{(\frac{1}{\omega C} - \omega L)^2 + R^2}}$$

$$\tan \psi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Первая формула – амплитудный заряд, вторая – фаза. β – декремент затухания, ω_0 – собственная частота, ω – частота источника.

81 Опишите и обоснуйте метод комплексных амплитуд (описание, обоснование, пример).

При рассмотрении задач с переменным током удобно представить гармоническую ЭДС как $U = U_0 e^{i\omega t}$ ~~тогда она будет как бы ходить по кругу с течением времени.~~ Как отмечено выше, по тому же закону будет меняться и ток: ~~$I = I_0 e^{i\omega t}$~~ . Заметим, что $\dot{I} = i\omega I$, аналогично

считается и U . Поэтому второй диффур из вопроса 78 будет переписан как

$$(-\omega^2 L + Ri\omega + \frac{1}{C})I = i\omega U.$$

Поделим все на $i\omega I$, в левой части останется

$$i\omega L + \frac{1}{i\omega C} + R = Z$$

Z называется импедансом и является, по сути, обобщением сопротивления на комплексные токи. Импедансы хороши тем, что, во-первых, для них работают те же законы, что и для обычных сопротивлений (то есть, для параллельных и последовательных соединений, а ~~так же~~ законы Кирхгофа), а, во-вторых, тем, что можно с их помощью вычислять амплитуды одних параметров цепи через другие, ведь по построению $|I||Z| = |U|$ (отсюда, кстати, и была получена формула на амплитуду заряда в прошлом пункте). Еще одной хорошей новостью служит то, что импедансы для всех трех типичных элементов цепи уже посчитаны (каждое из слагаемых в формуле выше), и их можно применять в любых задачах. ЕЩЕ одной хорошей новостью служит то, что разность фаз в одних и тех же, по крайней мере, частотах, теперь ищется как обычное частное (в экспоненциальной-то форме).

82 В чем заключается скин-эффект. Чему равна толщина скин-слоя в простейших случаях. Зависимость толщины скин-слоя от частоты.

Скин-эффектом называется концентрация переменного тока вблизи поверхности проводника или, иначе, затухание ЭМ-волны с глубиной ее проникновения в проводник.

Вернемся к уравнениям Максвелла. «Простейшими» случаями считаются линейные среды и пренебрежимые токи смещения, так что

$$\text{rot}\mathbf{B} = \mu\mathbf{j} = \mu\lambda\mathbf{E}_*$$

Продифференцируем обе части по t и, в силу того, что $\text{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$,

$$-\text{rot}(\text{rot}\mathbf{E}) = \mu\lambda\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$$

Так как мы внутри проводника, $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$. Пользуясь тем, что $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\mathbf{X})) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{X}) - \Delta \mathbf{X}$,

$$\Delta \mathbf{E} = \mu \lambda \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Для простоты положим, что вектор $\mathbf{E}$ направлен вдоль одной оси, а от других не зависит. Тогда

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} = \mu \lambda \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

Далее, поскольку E можно считать гармонически меняющейся переменной,

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \mu \lambda i \omega E_0$$

Мы получили очередной диффур в частных переменных, решение которого выписывать сюда смысла нет. Если на пальцах – в конечном счете мы получим выражение на плотность тока (естественно, такое же осциллирующее), в котором пространственная фаза будет зависеть от коэффициента перед амплитудой колебаний в диффуре. Поэтому расстояние, на котором концентрация тока в проводнике наивысшая, тоже будет зависеть от него и расчетным путем получено, что оно равно $\sqrt{\frac{2}{\lambda \mu \omega}}$. Видим, что частота в него входит отрицательным порядком, что говорит о малой толщине скин-слоя при очень больших частотах волн.

Я очень надеюсь, что этот файл кому-то поможет, кроме меня самого.

Удачи всем причастным на зачете и пусть вас не отчислят из-за всего, о чем

тут написано. 